Table des matières

On se donne ici $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leqslant b$ ainsi qu'une fonction f. On étudie $\displaystyle\int_a^b f$.

I Comment déterminer si oui ou non une intégrale est "classique" ou généralisée et la décomposer.

Méthode 1: Etudier la continuité de f.

- Si f est continue sur $[a, b]$:

C'est une intégrale "de première année" tout à fait classique. Toutes les propriétés du chapitre sur les intégrales "classiques" sur un segment s'appliquent.

- Sinon, si f est continue sur $]a, b]$ ou sur $[a, b[$ (semi-ouvert) :

C'est une intégrale généralisée avec un seul point incertain (resp. a ou b).

- Sinon, si f est continue sur $]a, b[$ (ouvert) :

C'est une intégrale généralisée avec deux points incertains (a et b). Dans certains cas, on peut la traiter en une seule fois avec une rédaction appropriée, ou la décomposer en deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$, avec $c \in]a, b[$. On sait alors que :

- si les deux intégrales sont convergentes, alors $\int_a^b f$ converge et par relation de Chasles,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- si au moins l'une des deux intégrales diverge, alors $\int_a^b f$ diverge.

- Sinon, s'il existe une série d'intervalles $[a_i, a_{i+1}[$ tels que $[a, b[= \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, a_{i+1}[$ avec f continue sur chacun des intervalles ouverts ou semi-ouverts $|a_i, a_{i+1}|$

C'est une intégrale généralisée avec des points incertains en chacun des points a_i.

On étudie chaque intégrale $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$, puis on peut utiliser la relation de Chasles si chacune des intégrale converge. Si une seule de ces intégrale diverge, alors $\int_a^b f$ diverge.

Nous allons détailler l'ensemble des méthodes à notre programme qui permettent de calculer une intégrale ou simplement connaitre sa nature dans les sections suivantes.

II Comment calculer la valeur d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ avec f continue sur $|a, b|$ semi-ouvert.

Dans cette section, on suppose que f est continue au moins sur $[a, b[$. (Le cas $]a, b]$ étant similaire.)

II-1 Calculer si on ne sait pas qu'elle est convergente

II.1-a) Si on peut trouver facilement une primitive de f :

On note F la primitive de f.

Méthode 2: On se ramène à la définition de la convergence de l'intégrale.

On pose $x \in [a, b[$. Puis,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Ainsi, si $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ existe, alors l'intégrale converge et

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)}$$

■ **Exemple 1** :

Montrer que l'intégrale $\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur

---

En premier lieu, on voit que $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est une fonction continue sur $[e, +\infty[$. Il n'y a donc qu'un seul point incertain en $+\infty$.

On voit que $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ est sous la forme $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x) = \ln x$. On sait donc qu'une primitive de f est

$$F : x \mapsto -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\ln x}$$

Soit alors $x \in [e, +\infty[$. On a

$$\int_e^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln e} = 1 - \frac{1}{\ln x}$$

Or, comme

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

on a

$$\int_e^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

D'où $\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ convergente et

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

II.1-b) Si $f = f_1 + \ldots + f_n$ où les $\int f_i$ sont des cas connus ou simples :

Méthode 3:	On utilise la linéarité de l'intégrale.

Rappel : Si **chacune des** $\int f_i$ **est convergente**, alors, on a le droit de dire que

$$\int f = \int f_1 + \ldots + \int f_n$$

En revanche, si **l'une d'entre elle (ou plus) diverge**, il faut y regarder de plus près en utilisant les règles de convergences habituelles :

$$\text{cv+cv=cv}, \quad \text{cv+dv=dv}, \quad \text{dv+dv=indéterminé}$$

Voyons un exemple de somme où les deux termes sont convergents :

■ Exemple 2 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x} - e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = x^3e^{-2x} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. On sait, par résultat de cours, que

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{convergent}$$

alors, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x} - e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Comme de plus, on connait les valeurs :

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3!}{2^4} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on peut, encore par linéarité, dire que

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-2x} - e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3!}{2^4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Voyons un exemple de somme où l'un des termes diverge :

■ Exemple 3 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2e^{-2x} - xe^{-x^2} + 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = \frac{x^2e^{-2x} - xe^{-x^2} + 1}{x}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. On reconnait que

$$f(x) = xe^{-2x} - e^{-x^2} + \frac{1}{x}$$

où, par résultat de cours et exemple traité dans le cours, on sait que

$$\int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x \text{ cv}, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ cv}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \text{ dv}$$

Par linéarité de l'intégrale, la somme de 2 intégrales convergente + 1 intégrale divergente est divergente. En conclusion, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2e^{-2x} - xe^{-x^2} + 1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge. (On ne peut donc pas calculer sa valeur !)

Erreur fréquente

Dans le cas par exemple d'une somme $f = f_1 + f_2$, une erreur fréquemment commise par manque d'attention est d'écrire directement

$$\int f = \int f_1 + \int f_2$$

ce qui est **totalement interdit**, car on pourrait être en présence d'une forme indéterminée et obtenir un non sens du type "nombre réel $= (+\infty) - (+\infty)$". Les deux exemples ci-dessous traduisent une situation où $dv + dv = dv$ puis $dv + dv =$ forme indéterminée qui donnait un résultat convergent. Voyons encore d'autres exemples :

■ Exemple 4 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = \frac{1+x}{x^3}$. f est ainsi continue sur $]0, 1]$ et on a

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

Étudions $\int_0^1 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x$ pour $n=2,3$. Soit $x\in]0,1]$. On a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_x^1 = \frac{1-x^{-n+1}}{-n+1} = \begin{cases} \frac{1}{x}-1 & \text{si } n=2 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right) & \text{si } n=3 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

et les deux intégrales sont donc divergentes. On ne peut donc pas utiliser la linéarité des intégrales généralisées. Il faut s'y prendre autrement. On propose ici le calcul direct de primitive en utilisant la linéarité sur $\int_x^1$, dont les valeurs sont déjà calculées :

Soit $x\in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{1+t}{t^3}\,\mathrm{d}t &= \int_x^1 \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale est donc divergente. (On ne peut calculer sa valeur !)

■ Exemple 5 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{1+x+x^2} - \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} - \frac{2}{x}$. f est bien définie et continue sur $[1,+\infty[$ car $1+x+x^2$ ne s'annule pas sur cet intervalle *(à étudier)*.

Soit $x\in [1,+\infty[$. On a $t\mapsto \frac{1+2t}{1+t+t^2}$ continue sur $[1,+\infty[$ et

$$\int_1^x \frac{1+2t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(1+t+t^2)\right]_1^x = \ln(1+x+x^2) - \ln 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

De même, on a $t\mapsto \frac{2}{t}$ continue sur $[1,+\infty[$ et

$$\int_1^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = [2\ln t]_1^x = 2\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On note alors que les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$ sont divergentes et la forme obtenue est indéterminée $(+\infty - (+\infty))$. On ne peut pas écrire de linéarité directement sur $\int_1^{+\infty}$. En revanche, les calculs déjà faits nous permettent d'affirmer, par linéarité de l'intégrale sur un segment, que

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{1+2t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(1+x+x^2) - \ln 3 - 2\ln x \quad \text{(forme indéterminée)} \\ &= \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)\right) - 2\ln x - \ln 3 \\ &= \ln x^2 + \ln\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right) - 2\ln x - \ln 3 \\ &= \ln\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right) - \ln 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\ln 3 \end{aligned}$$

L'intégrale est donc convergente et de plus :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{1+x+x^2} - \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln 3$$

II.1-c) Si on a une forme $f(x) = u'(x)v(x)$ et qu'une IPP semble réalisable :

Concernant les IPP, nous allons reprendre la même intégrale pour chaque exemple afin de voir la différence entre les différentes méthodes utilisées.

Méthode 4:	On réalise une IPP classique sur $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

On pose $x\in [a,b[$. L'intégrale $\int_a^x f$ devient donc une intégrale sur un segment $[a,x]$ fermé et on peut écrire l'IPP "classique" sur un segment :

$$\int_a^x f = [uv]_a^x - \int_a^x uv'$$

en prenant bien soin évidemment de vérifier le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions u,v choisies, i.e.

$$u,v\in\mathcal{C}^1([a,x]), \forall x\in [a,b[$$

ou de manière plus synthétique :

$$u,v\in\mathcal{C}^1([a,b[)$$

■ Exemple 6 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $x \in [1,+\infty[$. On pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \dfrac{1}{t^2} & u(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{où } u,v \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[) \end{array}$$

On a, par IPP sur $[1,x]$:

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = [uv]_1^x - \int_1^x uv'$$

Or,

$$[uv]_1^x = -\frac{1}{x}\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et

$$\int_1^x uv' = -\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

D'où, par somme de valeurs convergentes, on obtient la convergence du membre de droite et donc la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0 - (-1) = 1$$

■ Exemple 7 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On pose

$$\begin{array}{ll} u'(t) = \dfrac{1}{t^2} & u(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{où } u,v \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[) \end{array}$$

On a

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{t}\ln t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

L'IPP généralisée nous dit alors que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} u'v$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} uv'$. Étudions J. Soit $x \in [1,+\infty[$. On a

$$\int_1^x uv' = -\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

D'où J convergente (et donc également I convergente) avec

$$J = -1$$

et par suite, l'IPP généralisée nous permet d'écrire la formule d'IPP :

$$I = [uv]_1^{+\infty} - J = 0 - (-1)$$

i.e.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

Méthode 5: On tente une IPP généralisée directement sur $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On rappelle que pour appliquer l'IPP généralisée, il **faut** que

$\boldsymbol{u(x)v(x)}$ **admette une limite quand** $\boldsymbol{x \to b}$**.**

Il est donc obligatoire de vérifier ceci, mais ce n'est pas un "ssi" ! *On rappelle en effet que ceci ne dit rien sur la convergence de l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque :

Cette technique semble ici plus compliqué à rédiger que celle où l'on intègre simplement $\int_a^x f$. En réalité, c'est une méthode qui devient plus pertinente à utiliser dans les cas suivants :
- si on fait plusieurs IPP de suite et qu'on veut avoir des formules simples, qui ne contiennent pas trop de "x",
- si on sait déjà que l'intégrale de départ converge *(cf exemple sur l'IPP p.6)*,
- si les deux points a, b sont incertains (ça peut alors éviter le découpage en deux intégrales)
- ou si on veut montrer que l'intégrale diverge au final.

II.1-d) Si on nous propose de faire un changement de variable :

Méthode 6:	On réalise le changement de variable sur $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Il s'agit de se ramener à la définition de la convergence d'une intégrale généralisée et de faire le changement de variable sur l'intégrale sur le segment $[a, x]$.

Voyons ça sur un exemple déjà utilisé lors des IPP.

■ Exemple 8 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ par le changement de variable $u = \ln t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $x \in [1, +\infty[$. On pose, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$u(t) = \ln t, \qquad u \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$$

On a alors

$$t = e^u \qquad \mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u, \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 1 & x \\ \hline u & 0 & \ln x \end{array}$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln x} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u$$

Or,

$$\int_0^{\ln x} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\ln x} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

mais

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale de cours connue et convergente, de valeur 1, d'où, par passage à la limite :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$$

i.e. l'intégrale cherchée est convergente et vaut

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

Méthode 7:	On tente le changement de variable directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Spécificité intégrale généralisée

La différence entre le changement de variable sur un intervalle fermé borné et celui pour une intégrale généralisée est qu'il faut bien vérifier que le **changement de variable est strictement monotone.**

■ Exemple 9 :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ par le changement de variable $u = \ln t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On pose, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$u(t) = \ln t, \qquad u \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$$

On a alors $\qquad t = e^u \qquad \mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u, \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 1 & +\infty \\ \hline u & 0 & +\infty \end{array}$

Le fait que $\ln$ **(ou** exp**) est strictement croissante (se vérifie aussi sur** $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = e^u > 0$**) sur** $[1, +\infty[$ **nous assure que le changement de variable est strictement monotone.**

D'après le changement de variable généralisé, l'intégrale cherchée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u$ et en cas de convergence de l'une d'entre elle, on sait que $I = J$.

Or,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

devient une intégrale de cours connue et convergente, de valeur 1, d'où la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

II-2 Calculer si on sait déjà qu'elle est convergente

II.2-a) Si on reconnait directement un cas déjà connu

On cite directement le cas (par exemple un cas de cours ou une question déjà traitée).

II.2-b) Si on dispose d'une primitive de f

On note F la primitive de f.

Méthode 8: On utilise directement la primitive

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$$

■ Exemple 10 :

Sachant que l'intégrale $\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge, calculer sa valeur

---

On voit que $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est continue et sous la forme $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x) = \ln x$. On sait donc qu'une primitive de f sur $[e, +\infty[$ est

$$F : x \mapsto -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\ln x}$$

D'où

$$\int\limits_e^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right) + \frac{1}{\ln e} = 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}$$

Or, comme

$$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

on a

$$\frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'où

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

II.2-c) Si on a une forme $f(x) = u'(x)v(x)$ et qu'une IPP semble réalisable :

Méthode 9: On réalise une IPP classique sur $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque :

Cette méthode ne change pas beaucoup de la méthode vue dans la sous-section précédente 1.11 *("si on ne sait pas qu'elle est convergente.")* Il n'y a en fait pas grand intérêt à savoir que l'intégrale converge avant de commencer le calcul : on s'attend à avoir moins de calculs à faire mais en réalité, ce n'est pas beaucoup plus court...

■ Exemple 11 :

Sachant que l'intégrale est convergente, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in [1, +\infty[$. On pose

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \quad u(t) = -\tfrac{1}{t}$$
$$v(t) = \ln t \quad v'(t) = \tfrac{1}{t} \qquad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$$

On a, par IPP sur $[1, x]$:

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = [uv]_1^x - \int_1^x uv'$$

Or,

$$[uv]_1^x = -\frac{1}{x}\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et

$$\int_1^x uv' = -\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = -1 + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

Par somme de limites, on a alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0 - (-1) = 1$$

Méthode 10: On tente une IPP généralisée directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque :

Dans le cas que nous étudions ici (IPP avec intégrale convergente), il est plus esthétique d'utiliser directement cette méthode là plutôt que la précédente.

■ Exemple 12 :

Sachant que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, déterminer sa valeur éventuelle.

On pose

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \quad u(t) = -\tfrac{1}{t}$$
$$v(t) = \ln t \quad v'(t) = \tfrac{1}{t} \qquad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$$

On a, d'après les limites usuelles,

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{t}\ln t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on sait alors par IPP généralisée, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} uv'$ converge et que de plus

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} uv' \\ &= 0 + 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 0 + 1\end{aligned}$$

Conclusion : on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

Remarque :

Cette technique est également plus intéressante en terme de rédaction que le calcul avec $\int_a^x$ si on doit faire plusieurs IPP de suite !

II.2-d) Si on nous propose de faire un changement de variable :

Méthode 11:	On réalise le changement de variable sur $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

La méthode n'est pas différente de celle déjà évoquée dans la sous-section précédente 1.11 *("si on ne sait pas qu'elle est convergente.")*

Méthode 12:	On tente le changement de variable directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

La rédaction est là aussi presque équivalente à celle où on ne connait pas la nature de l'intégrale, à un petit détail près (en vert ci-dessous). Voyons ça sur un exemple :

■ **Exemple 13 :**

Sachant que l'intégrale est convergente, déterminer la nature et la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ par le changement de variable $u = \ln t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
On pose, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$u(t) = \ln t, \qquad u \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[)$$

On a alors

$$t = e^u \qquad \mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u, \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 1 & +\infty \\ \hline u & 0 & +\infty \end{array}$$

Le fait que ln (ou *exp*) est strictement croissante (se vérifie aussi sur $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = e^u > 0$) sur $[1, +\infty[$ nous assure que le changement de variable est strictement monotone.

D'après le changement de variable généralisé, comme l'intégrale cherchée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente, il en va de même pour $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u$ et on sait alors que

$$I = J$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{(e^u)^2} e^u\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

devient une intégrale de cours connue de valeur 1, d'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

III Comment calculer la valeur d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ avec f continue sur $]a, b[$ ouvert.

Dans cette section, on suppose que f est continue au moins sur $]a, b[$.

- Étape 1 :

Est ce $]a, b[$ est symétrique par-rapport à 0 ? (i.e. $]a, b[=]-\alpha, \alpha[$?)

Si oui, il est raisonnable de regarder si la fonction f est paire ? impaire ? pour se ramener à un problème d'intervalle semi-ouvert (section précédente.)

En effet, on rappelle que si $]a,b[=]-\alpha,\alpha[$:

- ⋆ Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f$ converge ssi $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f$ converge et **dans ce cas**,
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$$
on se ramène donc à un problème sur $[0,\alpha[$.
- ⋆ Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f$ converge ssi $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} f$ converge et **dans ce cas**,
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$$
on se ramène donc à un problème sur $[0,\alpha[$.

- Étape 2 :

Quelquesoit le résultat de la partie 1, on passe à l'étape 2. Si on est dans le cas précédent avec f paire ou impaire, on pose $c=0$ ci-dessous :

Méthode 13:	Décomposer en deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ avec $a<c<b$ puis raisonner sur chacune des deux intégrales.

On sait dans ce cas que :
- si les deux intégrales sont convergentes, alors $\int_a^b f$ converge et par relation de Chasles,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
- si au moins l'une des deux intégrales diverge, alors $\int_a^b f$ diverge.

Des techniques ont été vues pour ceci dans la section précédente. Nous n'y reviendrons donc pas.

Méthode 14:	Traiter les deux problèmes en une seule fois.

C'est possible si on projette par exemple de faire une IPP ou un changement de variable. *Détails dans les sections à venir...*

(On peut également le faire en passant au calcul de $\int_y^x f$ avec $y\to a$ et $x\to b$ comme traité dans le tout début de la section ci-dessous, mais c'est particulièrement déconseillé car sujet à de nombreuses erreurs quand on ne maîtrise pas sa théorie ou sa rédaction. Nous allons toutefois passer en revue ci-dessous cette stratégie pour information.)

Les sous-sections suivantes ne traiterons que des cas où on peut faire le calcul des deux cas en même temps. Les autres cas ayant déjà été étudiés dans la section précédente.

III-1 Si on ne sait pas qu'elle est convergente

III.1-a) Si on dispose d'une primitive de f :

Possible mais à éviter

Bien qu'attirante pour ceux qui préfèrent le travail sur "les x", comme dit dans les commentaires précédents, la méthode énoncée ci-dessous est largement déconseillée. Elle est en effet génératrice de grossières erreurs.

On note F la primitive de f.

Méthode 15:	On se ramène à la définition de la convergence de l'intégrale en faisant varier la borne inférieure et supérieure.

On pose $x,y\in]a,b[$. Puis, $\displaystyle\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(y)$

Ainsi,
- si $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ **et** $\lim\limits_{y\to a} F(y)$ existent, alors l'intégrale converge et
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{y\to a} F(y)}$$
- si au moins l'une des deux intégrale diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

■ Exemple 14 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ diverge.

En premier lieu, on voit que $f: x\mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est une fonction continue sur $]1,+\infty[$. Il n'y a donc deux pints incertains en 1 et $+\infty$.

On voit que $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ est sous la forme $\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x)=\ln x$. On sait donc qu'une primitive de f est
$$F: x\mapsto -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{\ln x}$$
Soient alors $x,y\in]1,+\infty[$. On a
$$\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(y)$$

Or, comme
$$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \ln y \xrightarrow[y\to 1^+]{} 0^+$$
on a
$$F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \qquad F(y) \xrightarrow[y\to 1]{} -\infty$$
D'où
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{diverge}$$

III.1-b) Si on a une forme $f(x) = u'(x)v(x)$ et qu'une IPP semble réalisable :

Dans cette section, nous allons reprendre la même intégrale pour chaque exemple afin de voir la différence entre les différentes méthodes utilisées pour les démonstrations.

Méthode 16: On tente une IPP généralisée directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

On rappelle que pour appliquer l'IPP généralisée, il **faut** que
$$u(x)v(x) \text{ admette une limite que } x \to b.$$
et que
$$u(x)v(x) \text{ admette une limite que } x \to a.$$
Il est donc obligatoire de vérifier ceci. En revanche, on rappelle également que ceci ne dit rien sur la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

■ Exemple 15 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur éventuelle.

La fonction $f : t \mapsto (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. On pose
$$u'(t) = (t+1)e^{-(t+1)^2} \qquad u(t) = -\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2}$$
$$v(t) = (t+1)^2 \qquad v'(t) = 2(t+1) \quad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1(]-\infty,+\infty[)$$
Par croissance comparée, on a
$$u(t)v(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-(t+1)^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$
Comme le crochet converge, on sait que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} uv'$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u'v$.

Or,
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$
Cette intégrale n'est pas un exemple connu a priori. Il faut donc faire le calcul. On traite ci-dessous par primitive.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\int_0^x (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-(x+1)^2} + \frac{1}{2}e^{-1}$$
D'où
$$\int_0^x (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \begin{cases} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}e^{-1} \\ \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}e^{-1} \end{cases}$$
Alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 uv'$ convergent avec
$$\int_0^{+\infty} uv' = \frac{1}{2}e^{-1} = \int_0^{-\infty} uv' = \frac{1}{2}e^{-1}$$
D'où la concergence de I avec
$$I = \int_{-\infty}^0 uv' + \int_0^{+\infty} uv' = -\int_0^{-\infty} uv' + \int_0^{+\infty} uv' = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} = 0$$

Remarque :

Dans l'exemple précédent, la stratégie n'était pas forcément optimale. En effet, on constate que la fonction à intégrer est impaire. Il aurait été plus pertinent de se ramener à l'étude de la convergence sur $[0,+\infty[$! Voyons ci-dessous une rédaction appropriée :

■ Exemple 16 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur éventuelle.

La fonction $f : t \mapsto (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et impaire. On sait alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

On pose

$$u'(t) = (t+1)e^{-(t+1)^2} \qquad u(t) = -\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2}$$
$$v(t) = (t+1)^2 \qquad v'(t) = 2(t+1) \quad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$$

Par croissance comparée, on a

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-(t+1)^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Comme le crochet converge, on sait que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} uv'$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$. Or,

$$J = \int_0^{+\infty} (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\int_0^x (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2}\right]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-(x+1)^2} + \frac{1}{2}e^{-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}e^{-1}$$

Alors J converge. puis par IPP, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ converge, d'où également $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ et par imparité, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

III.1-c) Si on nous propose de faire un changement de variable :

Méthode 17:	On tente le changement de variable directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

L'énoncé du théorème de changement de variable est le même quelquesoit le domaine de continuité de f, qu'il s'agisse de $[a, b[$ ou $]a, b[$. La seule différence est que dans le deuxième cas, on n'exige le caractère $\mathcal{C}^1$ du changement de variable que sur $]a, b[$ au lieu de $[a, b[$.

Remarque :

Il est possible que le changement de variable nous permette de nous "débarrasser" d'un point incertain, ce qui facilite le calcul au final. (cf exemple ci-dessous)

■ **Exemple 17 :**

Étudier la nature et donner la valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On pose, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$u(t) = \sqrt{t}, \qquad u \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$$

On a alors

$$t = u^2 \qquad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u, \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & +\infty \\ \hline u & 0 & +\infty \end{array}$$

On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u > 0$ sur $]0, +\infty[$, le changement de variable est donc bien strictement monotone.

D'après le changement de variable généralisé, l'intégrale cherchée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $J = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u}e^{-u}u\,\mathrm{d}u$ et en cas de convergence de l'une d'entre elle, on sait que $I = J$.
Or,

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}e^{-u}u\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

devient une intégrale de cours connue et convergente de valeur 1 avec seulement un point incertain : $+\infty$. On a donc

$$I = J = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$$

III-2 Si on sait déjà qu'elle est convergente

III.2-a) Si on reconnait un cas déjà connu :

On cite directement le cas avec la formule adéquate.

III.2-b) Si on dispose d'une primitive de f :

On note F la primitive de f.

Méthode 18:	On utilise directement la primitive :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)}$$

III.2-c) Si on a une forme $f(x) = u'(x)v(x)$ et qu'une IPP semble réalisable :

Méthode 19:	On tente une IPP généralisée directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque :

Dans cette partie, comme on sait que l'intégrale converge, la rédaction est simplifiée par-rapport à une IPP classique. Il est donc plus esthétique et plus rapide d'utiliser directement cette option là plutôt que la précédente. Attention toutefois, le fait que l'intégrale soit convergente n'assure en aucun cas que l'on peut faire une IPP. En effet, il faut encore vérifier que "le crochet" converge !

- **Exemple 18 :**

Sachant que l'intégrale est convergente, calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f : t \mapsto (t+1)^3 e^{-(t+1)^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. On pose

$$\begin{aligned} u'(t) &= (t+1)e^{-(t+1)^2} & u(t) &= -\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2} \\ v(t) &= (t+1)^2 & v'(t) &= 2(t+1) \quad \text{où } u, v \in \mathcal{C}^1(]-\infty, +\infty[) \end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-(t+1)^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$

Comme l'intégrale et le crochet convergent tous les deux, on sait que l'on peut appliquer la formule de l'IPP généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} uv' = -\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)e^{-(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-(t+1)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$$

III.2-d) Si on nous propose de faire un changement de variable :

Méthode 20:	On tente le changement de variable directement sur $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Comme précédemmenet, l'énoncé du théorème de changement de variable est le même quelquesoit le domaine de continuité de f, qu'il s'agisse de $[a, b[$ ou $]a, b[$. La seule différence est que dans le deuxième cas, on exige le caractère $\mathcal{C}^1$ du changement de variable seulement sur $]a, b[$ au lieu de $[a, b[$.

- **Exemple 19 :**

Sachant que l'intégrale converge, calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
On pose, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$u(t) = \sqrt{t}, \qquad u \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$$

On a alors

$$t = u^2 \qquad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u,$$

t	0	$+\infty$
u	0	$+\infty$

On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u > 0$ sur $]0, +\infty[$, le changement de variable est donc bien strictement monotone.

D'après le changement de variable généralisé, on sait que les deux intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $J = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u} u\,\mathrm{d}u$ sont convergentes et que

$$I = J$$

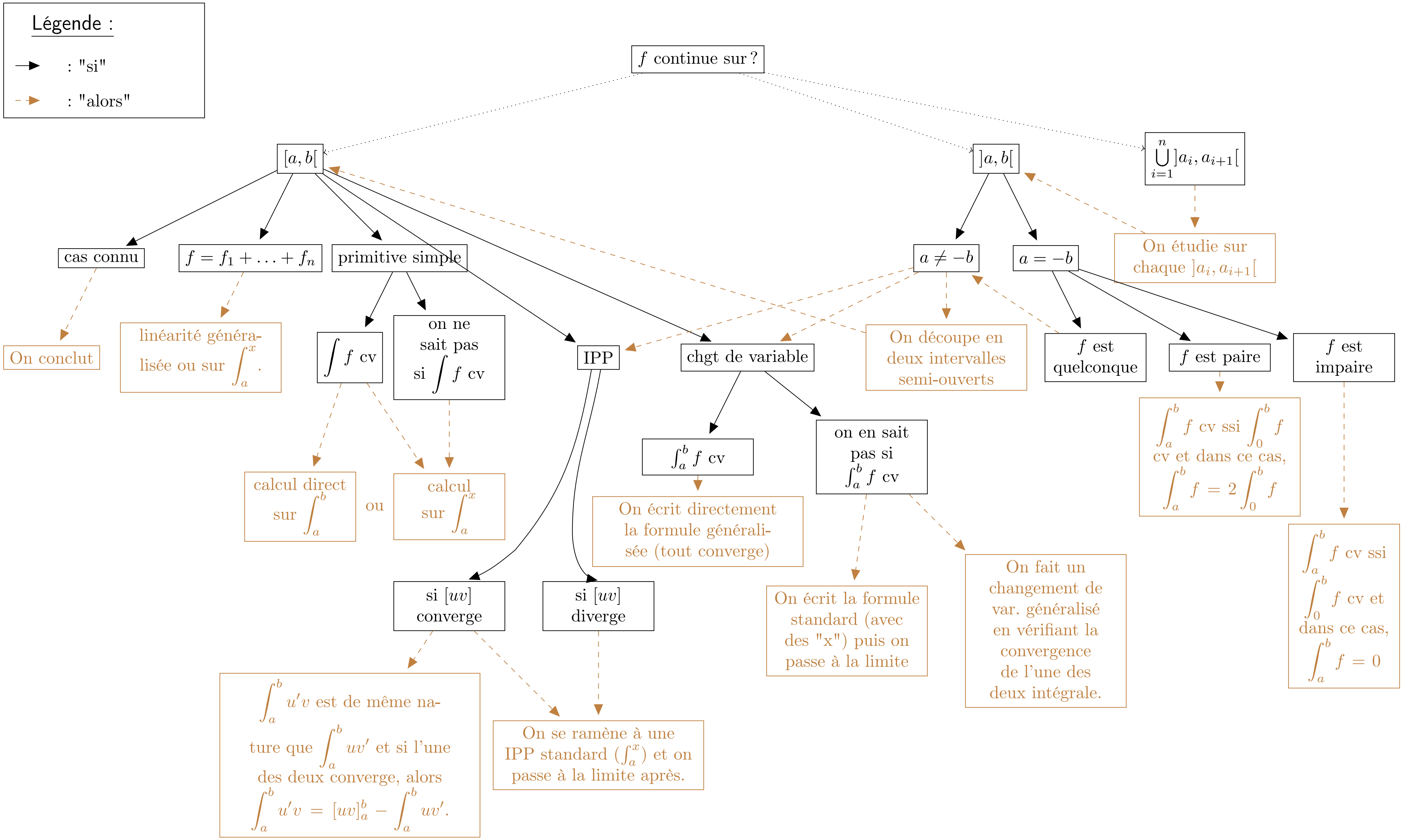
Or,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u} u\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

devient une intégrale de cours connue de valeur 1 avec seulement un point incertain : $+\infty$. On a donc

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$$

III-3 Récapitulatif des méthodes de calcul :



IV Comment savoir si une intégrale est convergente ?

Dans cette section, on estime qu'on doit étudier la nature d'une intégrale généralisée avec $\displaystyle\int_a^b f$ avec f continue sur $[a,b[$.
On fait le résumer ci-dessous des différentes étapes à considérer dans l'étude de l'intégrale et on laissera le lecteur se référer aux différentes sections afin d'avoir les détails de chaque partie.

- Etape 1 :
Si b est fini, l'intégrale est-elle faussement impropre ? *(cf* .1 p. 13)

  Rappel : ***Si b est fini****, alors on sait que*

$$\lim_b f \textit{ existe } \Rightarrow \int_a^b f \textit{ converge.}$$

  Cette étape doit être systématiquement testée en premier. Si c'est vrai, alors l'intégrale converge. Sinon, on ne sait pas. Il faut tenter autre chose.

- Etape 2 :
Est-ce qu'on peut changer les bornes pour avoir une intégrale connue ?

  On rappelle que si f est continue sur un intervalle I qui contient a, b, c, alors $\displaystyle\int_c^b f$ est de même nature que $\displaystyle\int_a^b f$.

- Etape 3 :
Est-ce que f se décompose en une somme de cas connus ?

  (cf .2 p. 13)

Les questions suivantes n'ont pas d'ordre spécifique.

- Question :
Est-ce que f est de signe constant ? *(cf* .3 p. 14)

  Si oui, on tente les majorations/minorations/équivalences.

- Question :
Est-ce que $]a,b[$ est symétrique par-rapport à 0 ? *(cf* .2 p. 15)

  Si oui, si f est paire ou impaire, on peut se ramener à l'étude sur $[0,b[$.

- Question :
Est-ce que $|f|$ est absolument convergente ? *(cf* .4 p.16)

  Si oui, alors $\int_a^b f$ converge également.

- Question :
Est-ce que la formule de f semble pouvoir se traiter par calcul ?

  On passe au calcul de $\int_0^x$ ou alors on fait une IPP ou un changement de variable (généralisé ou non), *Dans les autres cas, l'exercice devrait vous orienter vers d'autres techniques.*

IV-1 Si le point incertain est fini, l'intégrale est-elle faussement impropre ?

Rappel : ***Si b est fini****, alors on sait que*

$$\lim_b f \textit{ existe } \Rightarrow \int_a^b f \textit{ converge.}$$

Exemple 20 :

Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente.

La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $[-1,0[$ et $]0,1]$.
Il y a donc deux points incertains 0^- et 0^+. Dans les deux cas, on sait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$$

et ainsi, les intégrales $\int_{-1}^0 f$ et $\int_0^1 f$ sont toutes deux faussement impropres.
On en déduit que ces deux intégrales sont convergentes, et par suite, que

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge}$$

IV-2 Si on reconnait une décomposition en une somme d'intégrales connues

IV.2-a) Si c'est directement une intégrale connue

On cite le cas pour conclure. On rappelle que les cas de cours connus sont :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-at}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,dt$$

avec P un polynôme, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.
On sait que ces intégrales convergent ssi respectivement $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{\alpha > 0}$.

On sait également que dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Certaines intégrales sont connues car très étudiées dans les exemples de cours mais néanmoins ne sont pas explicitement au programme :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ dv}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ cv}$$

et

$$\int_0^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ dv}, \quad \int_0^{1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ dv}$$

Si on utilise ces intégrales, il faut redémontrer leur nature.

On rappelle également que les bornes de départ n'influent pas sur la nature de l'intégrale sous réserve d'être dans l'intervalle de continuité de f.

IV.2-b) Si c'est une combinaison linéaire de cas connus

Méthode 21: On utilise le théorème de linéarité du cours

Rappel : Si $f = f_1 + \ldots + f_n$ et que **chacune des** $\int f_i$ **est convergente**, alors, sait que

$$\int f \text{ converge.}$$

En revanche, si l'une d'entre elle diverge, il faut y regarder de plus près en utilisant les règles de convergences habituelles :

cv+cv=cv, cv+dv=dv, dv+dv=indéterminé

Voyons un exemple de somme où les deux termes sont convergents :

les exemples ci-dessous sont les mêmes que ceux déjà évoqués dans la section "calcul par linéarité" mais sont modifiés en conséquence de la question posée.

■ **Exemple 21** :

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x} - e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = x^3 e^{-2x} - e^{-x^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. On sait, par résultat de cours, que

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{convergent}$$

alors, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x} - e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Voyons un exemple de somme où l'un des termes diverge :

■ **Exemple 22** :

Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 e^{-2x} - x e^{-x^2} + 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = \frac{x^2 e^{-2x} - x e^{-x^2} + 1}{x}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. On reconnait que

$$f(x) = x e^{-2x} - e^{-x^2} + \frac{1}{x}$$

où, par résultat de cours, on sait que

$$\int_1^{+\infty} x e^{-2x}\,\mathrm{d}x \text{ cv}, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ cv}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \text{ dv}$$

Par linéarité de l'intégrale, la somme de 2 intégrales convergente + 1 intégrale divergente est divergente. En conclusion, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 e^{-2x} - x e^{-x^2} + 1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Remarque :

Dans le cas d'une somme dv+dv, une erreur fréquemment commise par manque d'attention est d'écrire directement

$$\int f = \int f_1 + \int f_2$$

ce qui est **totalement interdit**, puisqu'on ne sait pas faire de somme de deux valeurs qui n'existent peut être pas ou dont la somme est peut être $(+\infty) + (-\infty)$ Quelques exceptions toutefois si on a un cas $(+\infty) + (+\infty)$, mais encore faut-il savoir manier la rédaction avec précaution !!

IV-3 Si f est de signe constant

Méthode 22: On peut utiliser le théorème de comparaison des intégrales

Rappel : Supposons que f soit positive.

- S'il existe une fonction g telle que

$$0 \leqslant f \leqslant g$$

et que $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

- S'il existe une fonction g telle que

$$0 \leqslant g \leqslant f$$

et que $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b f$ diverge.

- Dans les autres cas de comparaison pour f, g positives, on ne peut pas se prononcer.

Si f est négative, on pose $\tilde{f} = -f$ ou on adapte le raisonnement.

■ Exemple 23 :

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln t \cdot e^{-bt}\, \mathrm{d}t$ est convergente pour tout $b > 0$.

On peut montrer que

$$\ln t \leqslant t, \quad \forall t \geqslant 1$$

(à faire : penser à faire une étude de fonction par exemple.) Alors, comme l'exponentielle est positive,

$$0 \leqslant \ln t \cdot e^{-bt} \leqslant t \cdot e^{-bt}, \quad \forall t \geqslant 1$$

et on sait, par résultat de cours, que $\int_0^{\infty} te^{-bt}\, \mathrm{d}t$ converge et donc que

$$\int_1^{\infty} te^{-bt}\, \mathrm{d}t \text{ converge}$$

D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on peut alors affirmer que

$$\int_1^{\infty} \ln t \cdot e^{-bt}\, \mathrm{d}t \text{ converge}$$

■ Exemple 24 :

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, \mathrm{d}t$ est divergente.

La fonction $t \mapsto \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme l'exponentielle est positive, on a

$$0 \leqslant \frac{e^t}{2} \leqslant \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \forall t \geqslant 1$$

et on sait, par résultat de cours, que

$$\int_0^{\infty} e^t\, \mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on peut alors affirmer que

$$\int_0^{\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, \mathrm{d}t \text{ diverge}$$

Méthode 23: On peut tenter de trouver un équivalent plus simple pour la fonction au point problématique

Rappel : Supposons que f soit positive et continue sur $[a, b[$, équivalente à une fonction g en b, elle aussi continue sur $[a, b[$, alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

IV-4 Si f est de signe quelconque

IV.4-a) Si l'étude se fait sur $]-b, b[$

Rappel : Si f est paire ou impaire, alors $\int_{-b}^b f$ converge ssi $\int_0^b f$ converge.

■ Exemple 25 :

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\, \mathrm{d}x$ converge.

La fonction $x \mapsto x^2 e^{-|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux points incertains : $-\infty$ et $+\infty$. Or, l'intervalle d'intégration est symétrique par-rapport à 0 et on constate que f est paire. Ainsi, l'intégrale converge ssi $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\, \mathrm{d}x$ converge. Or,

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x$$

qui est une intégrale de cours connue et convergente. En conclusion, l'intégrale étudiée est donc bien convergente.

IV.4-b) Si l'étude se fait sur un intervalle quelconque

Méthode 24: Convergence absolue

Rappel : On rappelle que si $\int_a^b |f|$ converge, alors $\int_a^b f$ converge également (mais que la réciproque est **fausse** !)

■ Exemple 26 :

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}, b > 0$.

La fonction $t \mapsto \cos(at)e^{-bt}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, Pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant |\cos(at)e^{-bt}| \leqslant e^{-bt}.$$

Or, $\int_0^{\infty} e^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge car $b > 0$. Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on sait que

$$\int_0^{+\infty} |\cos(at)e^{-bt}|\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \cos(at)e^{-bt}\,\mathrm{d}t \text{ converge (absolument).}$$

Méthode 25: Se ramener aux calculs

On se ramène à la section 1.1 ou à la section 12 pour faire les calculs et conclure sur la convergence ou la divergence de l'intégrale.

Si aucune de ces méthodes ne fonctionne pour vous : deux options possibles : vous n'avez pas assez cherché ou alors l'énoncé doit certainement vous guider vers d'autres choses à faire.

IV-5 Graphique récapitulatif des méthodes possibles à tester.

Ci-dessous un point de vue global sur la situation pouvant vous aider à trouver la bonne voie à suivre dans l'étude de la nature d'une intégrale.